МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Сспециальность 13.02.02

Теплоснабжение и теплотехническое оборудование

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

Братск 2018

Составила (разработала) Макович Е.В., преподаватель кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

«____» ____________________ 201_ г. ______________________

(Подпись зав. кафедрой)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____

(подпись председателя РС)

«____» ____________________ 201_ г.

Содержание

Введение

Данное методическое пособие предназначено для студентов второго курса специальности 13.02.02 «Теплоснабжение и теплотехническое оборудование». Пособие состоит из 7 разделов, каждый из которых содержит теоретические сведения, сопровождаемые разобранными примерами. Разделы соответствуют самостоятельной работе обучающихся согласно рабочей программы.

Материал, содержащийся в данном пособии, предназначен для тех студентов, кто уже владеет основными умениями, знаниями и навыками, приобретенными на уроках по темам:

1) матрицы и определители;
2) непрерывность функции;
3) основные правила и формулы дифференцирования;
4) определенный интеграл;
5) вычисление вероятности;
6) дискретная случайная величина.

В начале каждого раздела указано, что необходимо выполнить, в зависимости от формы контроля самостоятельной работы.

Хорошие знания и прочные навыки по решению задач являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения в дальнейшем математики, физики, ряда технических дисциплин.

Настоящее пособие имеет целью помочь учащимся в повышении уровня их знаний по решению задач от самых простых до более сложных.

Материалы пособия помогут студентам в качестве обучающего пособия. Разобранные задачи позволяют студентам изучать разделы самостоятельно.

1 Определители высших порядков

Написать конспект.

Эффективные методы вычисления определителя.

Рассмотрим определитель,

Разложим определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(36+42) + 0 - 8\cdot(6-12) = 156 + 48 = 204$$

На практике нулевые элементы игнорируются, и запись решения принимает более компактный вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(36+42) - 8\cdot(6-12) = 156 + 48 = 204$$

Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Здесь два нуля в третьей строке, по ней и раскрываем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot(20+9) = -58$$

Особый случай, когда определитель имеет так

называемый ступенчатый или треугольный вид, например: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ – в таком определителе все числа, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Разложим его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1\cdot(-3) - 0\cdot 3) = 2\cdot(3-0) = 6$$

В практических заданиях удобно руководствоваться следующим правилом – ступенчатый определитель равен произведению чисел его главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot(-3) = 6$$

Аналогичный принцип справедлив и для ступенчатых определителей других порядков, например,

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-4)\cdot 3 = -60$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Данный определитель оптимальнее разложить по третьему столбцу, поскольку там самые маленькие числа. При этом запись решения принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (35+12)+(30-6)+(24+14) = 47+24+38 = 109$$

Сформулируем золотое правило вычислений:

Определитель выгоднее раскрывать по той строке (столбцу), где:

- улей побольше;

- числа поменьше.

Естественно, это справедливо и для определителей высших порядков.

Небольшой пример для закрепления материала:

Задание 1

Вычислить определитель, раскрыв его по строке либо столбцу, используя при этом наиболее рациональный способ

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителя.

Рассмотрим: матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и её

определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 204$.

При транспонировании матрицы величина её определителя не меняется

Транспонируем матрицу:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Согласно свойству, определитель транспонированной матрицы равен тому же значению: $|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 204$.

Запишем оба определителя рядышком и проанализируем один важный момент:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 204 \qquad |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 204$$

В результате транспонирования первая строка стала первым столбцом, вторая строка – вторым столбцом, третья строка – третьим столбцом. Строки стали столбцами, а результат не изменился. Из чего следует важный факт: строки и столбцы определителя равноправны. Иными словами если какое-нибудь свойство справедливо для строки, то аналогичное свойство справедливо и для столбца!

Если две строки (или два столбца) определителя поменять местами, то определитель сменит знак

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 204.$$

Поменяем первую и третью строку местами: $\begin{vmatrix} -7 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -204$

Определитель сменил знак.

То есть, любая парная перестановка строк (столбцов) влечёт изменение знака определителя на противоположный.

Из строки (столбца) определителя можно вынести общий множитель

Внимание! В правиле речь идёт об одной строке или об одном столбце определителя. Пожалуйста, не путайте с матрицами, в матрице множитель выносится/вносится у всех чисел сразу.

Начнём с частного случая правила – вынесения «минус единицы»

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

В данном определителе слишком много минусов и неплохо бы сократить их количество.

Вынесем –1 из первой строки:

$$\begin{vmatrix} -1\cdot 1 & -1\cdot 4 & -1\cdot 6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Минус перед определителем, как уже демонстрировалось – не есть удобно. Смотрим на вторую строку определителя и замечаем, что минусов там тоже многовато.

Вынесем «минус» из второй строки:

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -(-)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Что можно сделать ещё? Все числа второго столбца делятся на 4 без остатка. Вынесем 4 из второго столбца:

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -5 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Справедливо и обратное правило – множитель можно не только вынести, но и внести, причём, в любую строку или в любой столбец определителя.

Задание 2

Вычислить определитель с помощью вынесения множителей из строк и столбцов $\begin{vmatrix} 13 & -91 & 26 \\ -2 & 42 & 2 \\ 5 & -70 & 5 \end{vmatrix}$

Это пример для самостоятельного решения.

Если две строки (столбца) определителя пропорциональны (как частный случай – одинаковы), то данный определитель равен нулю.

Здесь пропорциональны соответствующие элементы первой и второй строки:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

В следующем примере пропорциональны три столбца (и, три строки тоже):

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю

Пример: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Какие свойства определителей полезно знать?

Величина определителя не меняется при транспонировании. Свойство запоминаем.

Любая парная перестановка строк (столбцов) меняет знак определителя на противоположный.

Из строки (столбца) определителя можно вынести множитель (и внести его обратно).

Если строки (столбцы) определителя пропорциональны, то он равен нулю. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

Понижение порядка определителя.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

К строке определителя можно прибавить другую строку, умноженную на ненулевое число. При этом величина определителя не изменится

Пример: в определителе $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ получим ноль слева вверху.

Для этого вторую строку мысленно либо на черновике умножим на 3: (–3, 6) и к первой строке прибавим вторую строку, умноженную на 3:

$$\begin{matrix} 3 & 1 \\ + & + \\ -3 & 6 \\ \| & \| \\ 0 & 7 \end{matrix}$$

Результат записываем в первую строку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

Проверка: $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7$

Теперь в том же определителе $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ получим ноль справа внизу. Для этого ко второй строке прибавим первую строку, умноженную (мысленно) на –2 (смотрим и считаем снизу-вверх):

$$\begin{matrix} -7 & 0 \\ \| & \| \\ -6 & -2 \\ + & + \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

Результат записываем во вторую строку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7$

Обратите внимание: при элементарном преобразовании меняется та строка, к которой прибавляют.

Сформулируем зеркальное правило для столбцов:

К столбцу определителя можно прибавить другой столбец, умноженный на ненулевое число. При этом величина определителя не изменится

Возьмём $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ и, используя данное преобразование, получим ноль слева вверху. Для этого мысленно либо на черновике умножим второй столбец на –3: $\begin{matrix} -3 \\ -6 \end{matrix}$ и к первому столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –3:

$$\begin{matrix} 3 + (-3) = 0 \\ -1 + (-6) = -7 \end{matrix}$$

Результат запишем в первый столбец: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7$

И, наконец, в определителе $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ получим ноль справа внизу. Для этого ко второму столбцу прибавим первый столбец, умноженный (мысленно) на 2 (смотрим и считаем справа налево):

$$\begin{matrix} 7 = 6 + 1 \\ 0 = -2 + 2 \end{matrix}$$

Результат помещаем во второй столбец: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7$

Рассмотрим

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Задача состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований понизить порядок определителя до второго порядка.

С чего начать? Сначала в определителе нужно выбрать число-мишень. В качестве мишени почти всегда выступает единица либо –1. Смотрим на определитель и замечаем, что здесь даже выбор есть. Пусть числом-мишенью будет элемент $a_{23} = 1$:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & \boxed{1} \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

В данном случае индексы элемента a_{23} говорят нам о том, что он располагается во второй строке, третьем столбце.

Идея состоит в том, чтобы получить два нуля в третьем столбце:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & \boxed{1} \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Либо получить два нуля во второй строке:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & \boxed{1} \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Во второй строке числа поменьше (не забываем золотое правило), поэтому выгоднее взять именно её. А третий столбец с числом-мишенью останется неизменным:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & 4 \\ * & * & 1 \\ * & * & -3 \end{vmatrix}$$

Ко второму столбцу прибавляем третий столбец:

$-2+4=2$

$-1+1=0$

$2+(-3)=-1$

Тут и умножать ничего не пришлось.

Результат записываем во второй столбец:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & 2 & 4 \\ * & 0 & 1 \\ * & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

К первому столбцу прибавляем третий столбец, умноженный (мысленно) на –2:

$5+(-8)=-3$

$2+(-2)=0$

$-2+6=4$

Результат записываем в первый столбец, раскладываем определитель по второй строке:

$$\begin{vmatrix}5&-2&4\\2&-1&\mathbf{1}\\-2&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2&4\\0&0&\mathbf{1}\\4&\mathbf{-1}&-3\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3&2\\4&-1\end{vmatrix}=-(3-8)=5$$

Как мы понизили порядок определителя? Получили два нуля во второй строке.

Решим пример вторым способом, организуем нули в третьем столбце:

$$\begin{vmatrix}5&-2&4\\2&-1&\boxed{1}\\-2&2&-3\end{vmatrix}$$

Вторая строка с числом- «мишенью» останется неизменной:

$$\begin{vmatrix}5&-2&4\\2&\mathbf{-1}&1\\-2&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}*&*&*\\2&-1&1\\*&*&*\end{vmatrix}$$

К первой строке прибавим вторую строку, умноженную (мысленно) на –4:

$$\begin{array}{ccc}5&-2&4\\+&+&+\\-8&4&-4\\\|&\|&\|\\-3&2&0\end{array}$$

Результат записываем в первую строку:

$$\begin{vmatrix}5&-2&4\\2&-1&\mathbf{1}\\-2&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2&0\\2&-1&1\\*&*&*\end{vmatrix}$$

К третьей строке прибавим вторую строку, умноженную (мысленно) на 3 (смотрим и считаем снизу-вверх):

$$\begin{array}{ccc}4&-1&0\\\|&\|&\|\\6&-3&3\\+&+&+\\-2&2&-3\end{array}$$

Результат записываем в третью строку, определитель раскрываем по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix}5&-2&4\\2&-1&\mathbf{1}\\-2&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2&0\\2&\mathbf{-1}&1\\4&\mathbf{-1}&0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3&2\\4&-1\end{vmatrix}=-(3-8)=5$$

Задание 3

Вычислить тот же определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$, выбрав в качестве числа-«мишени» элемент $a_{22} = -1$. Понизить его порядок двумя способами: получив нули во второй строке и получив нули во втором столбце.

Это пример для самостоятельного решения.

Иногда в определителе отсутствует единица либо –1, например: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. В этом случае «мишень» следует организовать с помощью дополнительного элементарного преобразования. Сделать это можно чаще всего несколькими способами. Например, к первой строке прибавим вторую строку, умноженную –1:

$$\begin{matrix} 3 & 4 & -5 \\ + & + & + \\ -2 & -7 & -3 \\ \| & \| & \| \\ 1 & -3 & -8 \end{matrix}$$

Результат записываем в первую строку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 2 & 7 & 3 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Внимание: не нужно из первой строки вычитать вторую строку, это значительно увеличивает вероятность ошибки. Только складываем! Поэтому к первой строке прибавляем вторую строку, умноженную –1.

Единица получена, чего и требовалось достичь. Далее можно получить два нуля в первой строке либо в первом столбце. Желающие могут довести решение до конца (верный ответ: –176).

Задача

Вычислим определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

Есть возможность пойти стандартным путём, разложив данный определитель по строке либо столбцу. Вспоминая алгоритм первого урока, и, используя $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$, раскроем определитель, например, по «классической» первой строке:

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 6 & -3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 6 & -3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}5 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 6 & -3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 6\end{vmatrix}$$

Поэтому единственный разумный выход – понизить порядок определителя.

Единиц в определителе много, и наша задача выбрать лучший вариант. Вспоминаем золотое правило: в строке (столбце) нулей должно быть побольше, и числа – поменьше. По этой причине вполне подходит вторая строка либо четвёртый столбец. Четвёртый столбец выглядит привлекательнее, причём, там есть две единицы. В качестве мишени выбираем элемент $a_{14}=1$:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & \boxed{1}\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 6 & -3\end{vmatrix}$$

Первая строка не изменится. И вторая тоже – там уже необходимый ноль:

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 6 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\end{vmatrix}$$

К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на –1 (смотрим и считаем снизу-вверх):

$$\begin{array}{cccc}-4 & 3 & -2 & 0\\ \| & \| & \| & \|\\ -3 & 2 & -1 & -1\\ + & + & + & +\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{array}$$

Внимание ещё раз: Не нужно из третьей строки вычитать первую строку. Только складываем!

Результат записываем в третью строку:

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 6 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ -4 & 3 & -2 & 0\\ * & * & * & *\end{vmatrix}$$

К четвёртой строке прибавим первую строку, умноженную на 3 (смотрим и считаем снизу-вверх):

$$\begin{array}{cccc}
11 & -7 & 9 & 0 \\
\| & \| & \| & \| \\
9 & -6 & 3 & 3 \\
+ & + & + & + \\
2 & -1 & 6 & -3
\end{array}$$

Результат записываем в четвёртую строку:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 11 & -7 & 9 & 0 \end{vmatrix}\overset{(1)}{=}-\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 11 & -7 & 9 \end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 11 & -7 & 9 \end{vmatrix}\overset{(3)}{=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 19 & 0 & 8 \\ 46 & 0 & 23 \end{vmatrix}\overset{(4)}{=}$$

$$=-1\cdot\begin{vmatrix} 19 & 8 \\ 46 & 23 \end{vmatrix}=-(437-368)=-69$$

Раскрываем определитель по четвёртому столбцу. Не забываем, что к элементу $a_{14}=1$ нужно добавить минус (см. матрицу знаков).

Порядок определителя понижен до 3-го.

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на 3. К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на 7.

Раскрываем определитель по второму столбцу, тем самым ещё понижая его порядок до двух.

2 Сравнение бесконечно малых функций. Свойства непрерывных функций

Написать конспект.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to k} f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке k.

Начертим линию $f(x)=x$, как показано на рисунке 2.1.

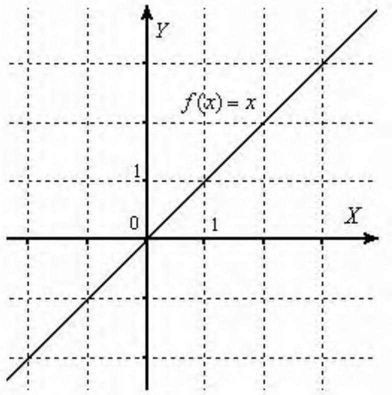

Рисунок 2.1 – Линия f(x)=x

Данная функция бесконечно мала в единственной точке: $\lim_{x\to0}(x)=0$ Следует отметить что, в точках «плюс бесконечность» и «минус бесконечность» эта же функция будет уже бесконечно большой: $\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$.

Во всех других точках, предел функции будет равен конечному числу, отличному от нуля.

Функция может быть бесконечно малой или бесконечно большой только в конкретной точке.

Таких точек может быть несколько и даже бесконечно много. Изобразим параболу, как показано на рисунке 2.2.

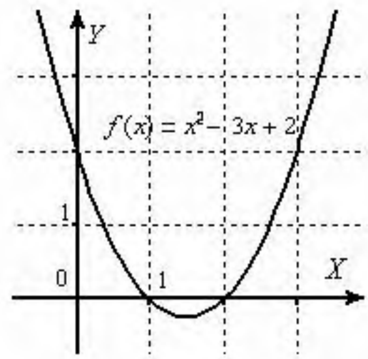

Рисунок 2.2 - Парабола

Представленная квадратичная функция является бесконечно малой в двух точках – в «единице» и в «двойке»: $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0,\ \lim_{x\to2}(x^2-3x+2)=0$

Как и в предыдущем примере, на бесконечности данная функция является бесконечно большой: $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2-3x+2)=+\infty$

Смысл двойных знаков: Запись $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ обозначает, что при $x\to+\infty,\ f(x)\to+\infty$, а при $x \to -\infty, \quad f(x) \to -\infty$.

Запись $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ обозначает, что при $x \to +\infty, \quad f(x) \to -\infty$, а при $x \to -\infty, \quad f(x) \to +\infty$.

Запись $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ обозначает, что и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty, \quad f(x) \to +\infty$.

Запись $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ обозначает, что и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty, \quad f(x) \to -\infty$.

$f(x) = \sin x$. Это пример, когда функция бесконечно мала в бесконечном количестве точек:

$$\ldots, \quad \lim_{x\to-\pi}(\sin x) = 0, \quad \lim_{x\to 0}(\sin x) = 0, \quad \lim_{x\to\pi}(\sin x) = 0, \quad \ldots$$

Действительно, синусоида пересекает ось абсцисс через каждое «пи» , как показано на рисунке 2.3.

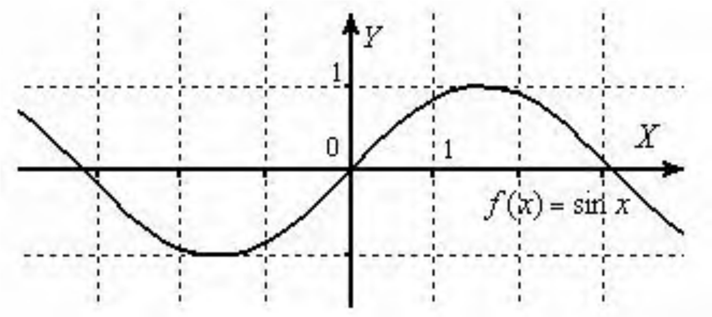

Рисунок 2.3 - Синусоида

Сравнение бесконечно малых функций.

Рассмотрим следующую бесконечно малую функцию: $\lim\limits_{x\to 0}(x^3 + x^2 + x) = 0$

в пределе находится сумма функций $f(x) = x^3, g(x) = x^2, h(x) = x$, и некоторые из них будут стремиться к нулю быстрее, а некоторые – медленнее.

Построим последовательность $x = 0{,}1, \quad x = 0{,}01, \quad x = 0{,}0001, \quad \ldots$, которая стремится к нулю, и вычислим несколько значений трёхчлена $x^3 + x^2 + x$:

$$x = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad (0{,}1)^3 + (0{,}1)^2 + 0{,}1 = 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}1 = 0{,}111$$

$$x = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad (0{,}01)^3 + (0{,}01)^2 + 0{,}01 = 0{,}000001 + 0{,}0001 + 0{,}01 = 0{,}010101$$

$$x = 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad (0{,}001)^3 + (0{,}001)^2 + 0{,}001 = 0{,}000000001 + 0{,}000001 + 0{,}001 = 0{,}001001001$$

$\ldots$

Очевидно, что с уменьшением значений «икс», функция $f(x) = x^3$ убегает к нулю быстрее всех остальных (её значения обведены красным цветом). Говорят, что функция $f(x) = x^3$ более высокого порядка малости, чем функции $g(x) = x^2, h(x) = x$, а также более высокого порядка малости, чем $x^2 + x$.

От $h(x)=x$ зависит, насколько быстро сумма x^3+x^2+x приблизится к нулю:

$$x=0{,}1 \Rightarrow (0{,}1)^3+(0{,}1)^2+0{,}1=0{,}001+0{,}01+\boxed{0{,}1}=\boxed{0{,}1}11$$
$$x=0{,}01 \Rightarrow (0{,}01)^3+(0{,}01)^2+0{,}01=0{,}000001+0{,}0001+\boxed{0{,}01}=\boxed{0{,}01}0101$$
$$x=0{,}001 \Rightarrow (0{,}001)^3+(0{,}001)^2+0{,}001=0{,}000000001+0{,}000001+\boxed{0{,}001}=\boxed{0{,}001}001001$$
...

В рассмотренном пределе, всё это, конечно, не имеет особого значения, ведь в результате всё равно получается ноль. Однако небольшие функции начинают играть принципиально важную роль в пределах с дробями.

Пример 1

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2}{x^2+4x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2}{x^2+4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-2)}{x(x+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\to 0}\cdot(x^{\to 0}-2)}{x^{\to 0}+4}=\frac{0\cdot(0-2)}{0+4}=\frac{0\cdot(-2)}{4}=0$$

На первом шаге в числителе выносим за скобки x^2, а в знаменателе «икс». На втором шаге сокращаем числитель и знаменатель на «икс», устраняя тем самым неопределённость. Указываем, что оставшиеся «иксы» стремятся к нулю, и получаем ответ.

Числитель более высокого порядка малости, чем знаменатель. Что это значит? Числитель стремится к нулю быстрее, чем знаменатель, именно поэтому в итоге и получился ноль.

Как и в случае с бесконечно большими функциями, ответ можно узнать заранее. Приём аналогичен, но отличается тем, что в числителе и в знаменателе нужно мысленно отбросить все слагаемые со старшими степенями

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{4}=0$$

Пример 2

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}}{x^4+7x^2+5x}$$

Мысленно отбросим все старшие слагаемые числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5\sqrt{x}}=\frac{2}{5\cdot 0}=\infty$$

Алгоритм решения, точно такой же, как и в предыдущем примере:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}}{x^4+7x^2+5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\cdot(3x-\sqrt{x}+2)}{x\cdot(x^3+7x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{\to 0}-\sqrt{x}^{\to 0}+2}{\sqrt{x}^{\to 0}\cdot(x^{3\to 0}+7x^{\to 0}+5)}=\frac{0-0+2}{0\cdot(0+0+5)}=\frac{2}{0\cdot 5}=\infty$$

Пример 3

Вычислить предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{x^2-x}$

Узнаем ответ, мысленно отбросив все старшие слагаемые числителя и знаменателя:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{-x}=2$

Решаем:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(3x-2)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^{\to 0}-2}{x^{\to 0}-1}=\dfrac{-2}{-1}=2$

Систематизируем информацию о сравнении бесконечно малых функций:

Пусть $f(x), g(x)$ – бесконечно малые функции в точке k (т.е. $f(x)\to 0, g(x)\to 0$ при $x\to k$) и существует предел их отношений $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то функция $f(x)$ более высокого порядка малости, чем $g(x)$.

Простейший пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$, то есть кубическая функция более высокого порядка малости, чем квадратичная;

2) если $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то функция $g(x)$ более высокого порядка малости, чем $f(x)$.

Простейший пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, то есть квадратичная функция более высокого порядка малости, чем линейная;

3) если $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}=n$, где n – ненулевая константа, то функции имеют одинаковый порядок малости.

Простейший пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$, $f(x)=2x^2$ бежит к нулю строго в два раза медленнее, чем $g(x)=x^2$, и «дистанция» между ними сохраняется постоянной.

Наиболее интересен частный случай, когда $n=1:\quad \lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Такие функции называют бесконечно малыми эквивалентными функциями.

Эквивалентность – это равнозначность (или равноценность) в каком-нибудь отношении.

Обозначение: эквивалентность обозначается значком «тильда». Например: $\sin x \sim x$ – «синус икса эквивалентен иксу», если $x\to 0$.

Замечательные эквивалентности в пределах.

Решим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$. Заменим бесконечно малую функцию числителя $s(x)=\sin 7x$ на эквивалентную бесконечно малую функцию $t(x)=7x$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$

Почему можно провести такую замену? Потому что бесконечно близко вблизи нуля график функции $s(x)=\sin 7x$ практически совпадает с графиком функции $t(x)=7x$.

В этом примере мы использовали табличную эквивалентность $\sin\alpha\sim\alpha$, где $\alpha=7x$. Удобно, что в качестве параметра «альфа» может выступать не только «икс», но и сложная функция, которая стремится к нулю.

Найдём предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$. В знаменателе используем эту же эквивалентность $\sin\alpha\sim\alpha$, в данном случае $\alpha=\frac{x}{2}$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cdot 4x^2}{x^2}=20$

Найдём предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$. Заменим бесконечно малую функцию числителя эквивалентной функцией $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\cdot\alpha^2$, где $\alpha=4x$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(4x)^2}{5x}=\frac{1}{10}\lim\limits_{x\to 0}\frac{16x^2}{x}=\frac{8}{5}\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$

Найдём предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{2x^2}$. Заменим бесконечно малую функцию числителя эквивалентной функцией $tg\alpha\sim\alpha$, где $\alpha=2x$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$

3 Производная неявной функции. Основные теоремы дифференциального исчисления

Написать конспект.

Функция одной переменной $y = f(x)$ – это правило, по которому каждому значению независимой переменной x соответствует одно и только одно значение функции y.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом. Переменная y называется зависимой переменной или функцией.

Рассмотрим функцию $y = 3x^4 + x^2 - 1$

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек», а справа – только «иксы». То есть, функция y в явном виде выражена через независимую переменную x.

Рассмотрим другую функцию: $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Здесь переменные x и y расположены «вперемешку».

$3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ – пример неявной функции.

Пример 1

Найти производную от функции, заданной неявно $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

1)

$(3x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$

2) Используем правила линейности производной

$3(x^2y^2)' - 5(x)' + (\sin y)' = 3(y)' - (1)'$

3) Непосредственное дифференцирование.

$(\sin y)' = \cos y \cdot y' = y' \cos y$

Произведение дифференцируем по обычному правилу $(uv)' = u'v + uv'$:

$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)'$

$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:

$3((x^2)'y^2 + x^2(y^2)') - 5 + \cos y \cdot y' = 3y' - 0$

$3(2xy^2 + x^2 \cdot 2yy') - 5 + y' \cos y = 3y'$

$6xy^2 + 6x^2yy' - 5 + y' \cos y = 3y'$

4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть – переносим всё остальное:

$6x^2yy' + y' \cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$

5) В левой части выносим производную y' за скобки:

$(6x^2y + \cos y - 3)y' = 5 - 6xy^2$

6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

$$y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2y + \cos y - 3}$$

Пример 2

Найти производную от функции, заданной неявно $3x^4y^5 + e^{7x-4y} = 4x^5 + 2y^4$

$\left(3x^4y^5 + e^{7x-4y}\right)' = \left(4x^5 + 2y^4\right)'$

Используем правила линейности:

$3(x^4y^5)' + (e^{7x-4y})' = 4(x^5)' + 2(y^4)'$

Находим производные:

$3((x^4)'y^5 + x^4(y^5)') + e^{7x-4y} \cdot (7x-4y)' = 4 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4y^3y'$

$3(4x^3y^5 + x^4 \cdot 5y^4y') + e^{7x-4y} \cdot (7-4y') = 20x^4 + 8y^3y'$

Раскрываем все скобки:

$12x^3y^5 + 15x^4y^4y' + 7e^{7x-4y} - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 + 8y^3y'$

Переносим все слагаемые с y' в левую часть, остальные – в правую часть:

$15x^4y^4y' - 8y^3y' - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5$

у

В левой части выносим y' за скобку:

$(15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y})y' = 20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5$

Окончательный ответ:

$$y' = \frac{20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5}{15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y}}$$

4 Приложения производной к решению задач на экстремум

Написать конспект.

Задача 1.

Найти наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$

Нам нужно составить функцию $\rho(x)$ расстояния между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 2$. За аргумент этой функции принимаем абсциссу точки $M(x; x^2)$, которая принадлежит параболе и «свободно перемещается по ней», как показано на рисунке 4.1.

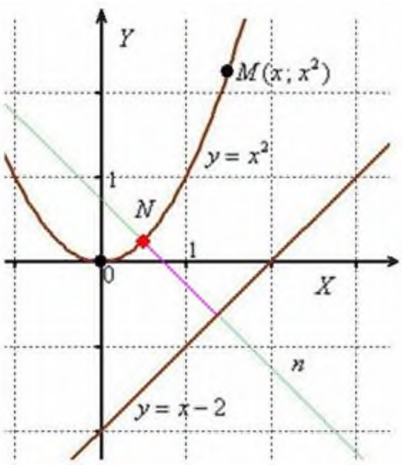

Рисунок 4.1 – Парабола и прямая

Используем формулу расстояния от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $d: Ax + By + C = 0$:

$$\rho(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

В нашем случае $M(x_0; y_0) = M(x; x^2)$ (то есть $x_0 = x, y_0 = x^2$); $d: x - y - 2 = 0 \quad (A = 1, B = -1)$.

Таким образом: $\rho(x) = \rho(M; x - y - 2 = 0) = \frac{|1 \cdot x - 1 \cdot x^2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |x - x^2 - 2|$ – функция расстояния между параболой и прямой, зависящая от абсциссы точки параболы.

Дифференцируем по обычным правилам, невзирая на модуль:

$$\rho'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |x - x^2 - 2|\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1 - 2x| = 0$$

$x = \frac{1}{2}$ – критическая точка

Проверим выполнение достаточного условия экстремума. Оцените, насколько второе достаточное условие приятнее и удобнее 1-го:

$\rho''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1 - 2x|\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0 - 2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |-2| = \frac{2}{\sqrt{2}} = const > 0$ для всех «икс». В частности:

$\rho''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}>0$, следовательно, функция $\rho(x)$ достигает минимума в точке $x=\frac{1}{2}$:

$$\rho_{\min}=\rho\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|-\frac{7}{4}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{8}\,ed.\approx 1{,}24\,ed.$$

Ответ: $\rho_{\min}=\frac{7\sqrt{2}}{8}\,ed.\approx 1{,}24\,ed.$

Задача 2.

Из куска проволоки длиной 30 *см* требуется согнуть прямоугольник наибольшей площади. Каковы размеры этого прямоугольника?

Давайте немного проанализируем условие:

Что требуется найти? Очевидно, длину и ширину – это «традиционные» характеристики, определяющие прямоугольник.

Требуется найти минимальную/максимальную площадь? Составляем функцию площади;
Минимальную/максимальную диагональ? Составляем функцию длины диагонали;
Минимальный/максимальный периметр? Составляем функцию периметра

Найти прямоугольник максимальной площади, если его периметр равен 30 см.

Выполните схематический чертёж, подумайте, что обозначить за «икс» составьте функцию площади $s(x)$

Решение: найдем полупериметр прямоугольника: $\frac{30}{2}=15\ см$. Обозначим через x длину стороны прямоугольника (любую). Тогда $15-x$ – длина смежной стороны, как показано на рисунке 4.2.

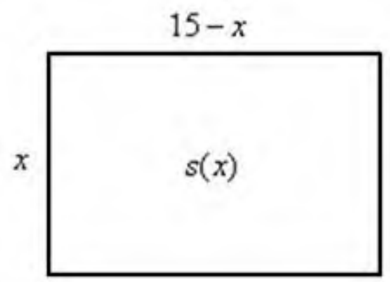

Рисунок 4.2 – Прямоугольник

Составим функцию площади прямоугольника: $s(x)=x(15-x)=15x-x^2$.

Найдем критические точки:

$s'(x) = (15x - x^2)' = 15 - 2x = 0$

$x = 7{,}5$ – критическая точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума. $s''(x) = (15 - 2x)' = -2 = const \Rightarrow s''(7{,}5) = -2 < 0$, значит, функция $s(x)$ достигает максимума в точке $x = 7{,}5$.

Таким образом $x = 7{,}5\ см$ – оптимальная длина стороны прямоугольника, длина смежной стороны: $15 - x = 15 - 7{,}5 = 7{,}5\ см$; при этом максимальная площадь:

$s_{max} = 7{,}5 \cdot 7{,}5 = 56{,}25\ см^2$

Ответ: оптимальный прямоугольник представляет собой квадрат со стороной $7{,}5\ см$; при этом максимальная площадь: $s_{max} = 56{,}25\ см^2$.

5 Приложения определенного интеграла

Разобрать текст и решить задачи.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком некоторой функции, осью и прямыми, представлена на рисунке 5.1.

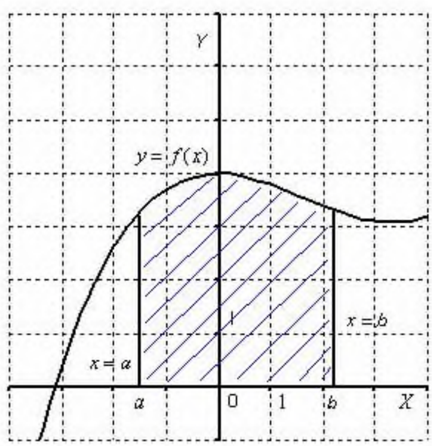

Рисунок 5.1 – Криволинейная трапеция

Площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$.

Внимание! Не следует путать два типа задач:

1) если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным;

2) если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна.

Пример 1:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$, как показано на рисунке 5.2.

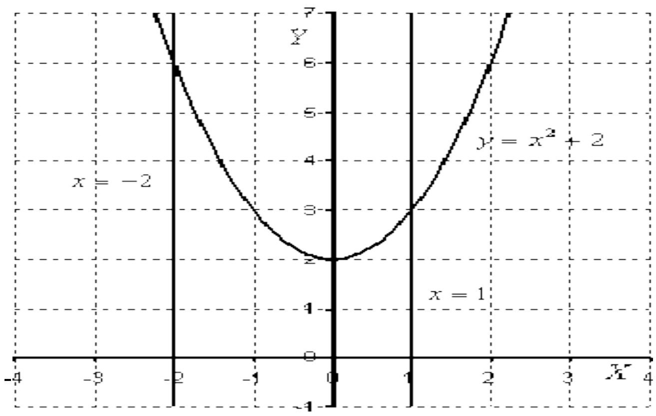

Рисунок 5.2 – Фигура, ограниченная линиями

На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью OX, поэтому:

$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{1}{3}+2-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4=9$$

Ответ: $S=9\ ед^2$

Пример 2:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $x=2$, $x=4$ и осью OX, как показано на рисунке 5.3.

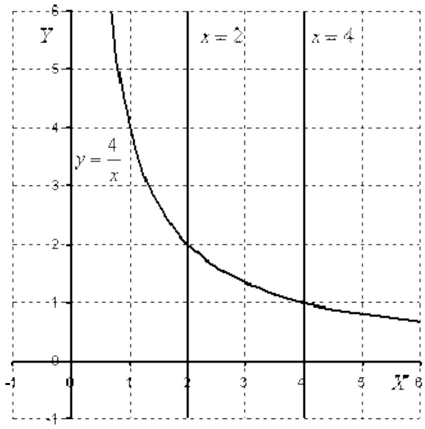

Рисунок 5.3 – Фигура, ограниченная линиями

На отрезке $[2;4]$ график функции $y=\frac{4}{x}$ расположен над осью OX, поэтому: $S=\int_{2}^{4}\frac{4dx}{x}=4(\ln x)\Big|_{2}^{4}=4(\ln 4-\ln 2)=4\ln\frac{4}{2}=4\ln 2$

Пример 3:

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$, как показано на рисунке 5.4.

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж. Найдем точки пересечения параболы $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x$. Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:

$2x-x^2=-x$

$3x-x^2=0$

$x(3-x)=0$

$x_1=0, x_2=3$

Значит, нижний предел интегрирования $a=0$, верхний предел интегрирования $b=3$.

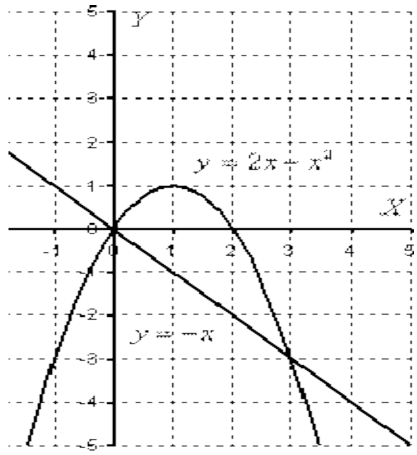

Рисунок 5.4 – Фигура, ограниченная линиями

Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь соответствующей фигуры можно найти по формуле: $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

Важно, какой график выше (относительно другого графика), а какой – ниже**.**

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x-x^2$ необходимо вычесть $-x$

Искомая фигура ограничена параболой $y=2x-x^2$ сверху и прямой $y=-x$ снизу.

$$S=\int_0^3(2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-0+0=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

Ответ: $S=4\frac{1}{2}$ $ед^2$

Пример 4:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$

Представим уравнения в виде $y=-\frac{3}{4}x^2$, $y=\frac{-2x-1}{4}$ и выполним поточечный чертеж, как показано на рисунке 5.5.

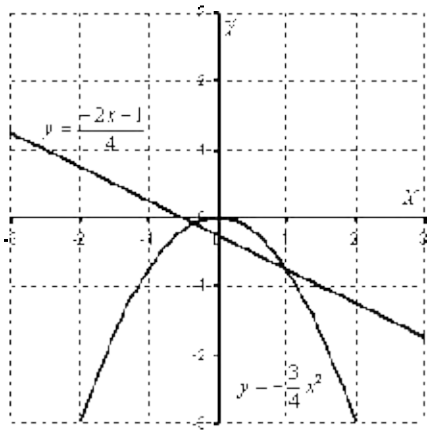

Рисунок 5.5 – Фигура, ограниченная линиями

Найдем точки пересечения прямой $y=\frac{-2x-1}{4}$ и параболы $y=-\frac{3}{4}x^2$. Для этого решаем уравнение:
$\frac{-2x-1}{4}=-\frac{3}{4}x^2$

$3x^2=2x+1$

$3x^2-2x-1=0$

$D=4+12=16;\ \sqrt{D}=4$

$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{6}$

$x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$

$a=-\frac{1}{3}$.

На отрезке $\left[-\frac{1}{3};1\right]-\frac{3}{4}x^2\geq\frac{-2x-1}{4}$, по соответствующей формуле:
$S=\int\limits_{-1/3}^{1}\left(-\frac{3}{4}x^2-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)dx=\int\limits_{-1/3}^{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)dx=\left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\Big|_{-1/3}^{1}=$

$=\frac{1}{4}(x+x^2-x^3)\Big|_{-1/3}^{1}=\frac{1}{4}\left(1+1-1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{27}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{27}=\frac{8}{27}$

Ответ: $S=\frac{8}{27}$ $ед.^2\approx 0{,}3$ $ед.^2$

Если криволинейная трапеция ограниченная линией y=f(x)$\geq$0 и прямыми y=0, x=a, x=b, вращается вокруг оси x, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx, \quad (1)$$

где π – число, равное примерно 3,14;

$\int_a^b$ - пределы интегрирования;

f(x) – линия.

Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси оу вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy, \qquad (2)$$

где π – число, равное примерно 3,14;

$\int_a^b$ - пределы интегрирования;

f(x) – линия.

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, при этом не забываем, что уравнение $y = 0$ задаёт ось OX как показано на рисунке 5.6.

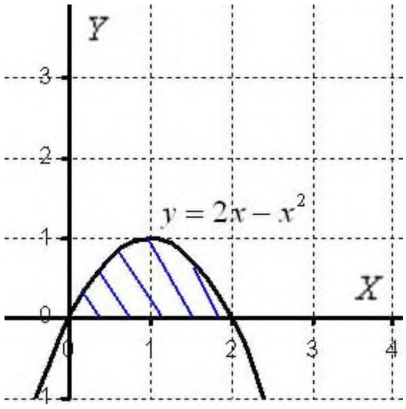

Рисунок 5.6 – Фигура, ограниченная линиями

Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле 1.

Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x) = 2x - x^2$ сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом объем тела вращения всегда неотрицателен.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\pi\cdot\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}-0\right)=\frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V=\dfrac{16\pi}{15}\,ед^3.\approx 3{,}35\,ед^3.$

В ответе нужно обязательно указать размерность – кубические единицы $ед^3$.

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=2x+1$, $y=x+4$, $x=0$ и $x=1$

Решение: Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y=2x+1$, $y=x+4$, $x=0$, $x=1$, не забывая при этом, что уравнение $x=0$ задает ось OY как показано на рисунке 5.7.

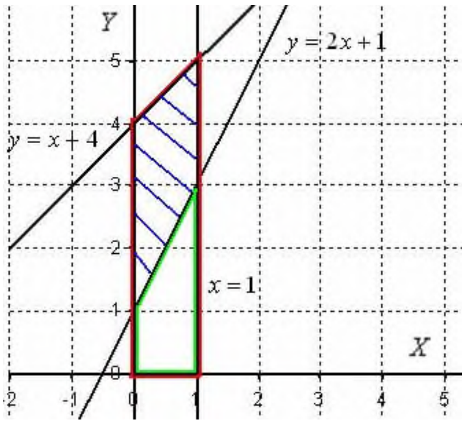

Рисунок 5.7 – Фигура, ограниченная линиями

Искомая фигура заштрихована синим цветом. Объем тела вращения вычислим как разность объемов тел.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси OX получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси OX, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2.

И, очевидно, разность объемов $V=V_1-V_2$ – объем нашей фигуры.

Используем формулу 1. Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой $y=x+4$, поэтому:

$$V_1=\pi\int_0^1(x+4)^2dx=\pi\int_0^1(x^2+8x+16)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+4x^2+16x\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}+4+16\right)=\frac{61\pi}{3}$$

Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой $y=2x+1$, поэтому:

$$V_1=\pi\int_0^1(2x+1)^2dx=\pi\int_0^1(4x^2+4x+1)dx=\pi\left(\frac{4x^3}{3}+2x^2+x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{4}{3}+2+1\right)=\frac{13\pi}{3}$$

Объем искомого тела вращения: $V=V_1-V_2=\frac{61\pi}{3}-\frac{13\pi}{3}=\frac{48\pi}{3}=16\pi$

Ответ: $V=16\pi\, ед.^3\approx 50{,}3\, ед^3.$

Пример 3

Дана плоская фигура, ограниченная линиями, $y=3-\sqrt{x}$, $y=x+1$ как показано на рисунке 5.8.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси OY.

Вычислим объем тела, образованного вращением данной фигуры, вокруг оси OY.

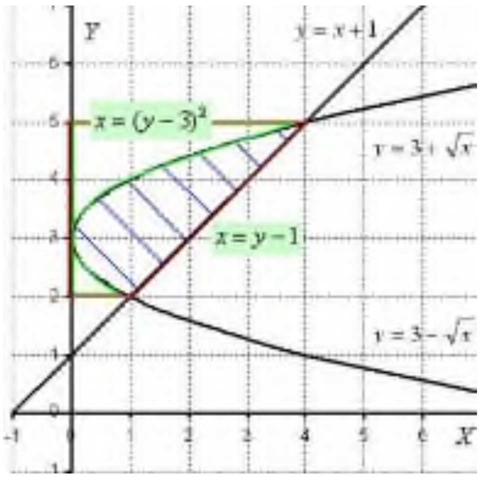

Рисунок 5.8 – Фигура, ограниченная линиями

Итак, фигура, заштрихованная синим цветом, вращается вокруг оси OY. В результате получается «зависшая бабочка», которая вертится вокруг своей оси.

Для нахождения объема тела вращения будем интегрировать по оси OY. Сначала нужно перейти к обратным функциям. Очевидно, что объем тела вращения, следует найти как разность объемов.

Вращаем фигуру, обведенную красным цветом, вокруг оси OY, в результате получается усеченный конус. Обозначим этот объем через V_1.

Вращаем фигуру, обведенную зеленым цветом, вокруг оси OY и обозначаем через V_2 объем полученного тела вращения.

Объем нашей бабочки равен разности объемов $V=V_1-V_2$.

Используем формулу 2 для нахождения объема тела вращения:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 ((y-3)^2)^2 dy = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 (y-3)^4 dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(y-1)^3\Big|_2^5 - \frac{\pi}{5}(y-3)^5\Big|_2^5 = \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{5}(32-(-1)) = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}$$

Ответ: $V = \dfrac{72\pi}{5}$ ед.$^3 \approx 45{,}24$ ед^3.

Решить задачи.

Дана функция y = f(x).Найти:

1) площадь фигуры, ограниченной графиком функции и осью ох;

2) объем фигуры, полученной вращением графика функции вокруг оси ох.

Вариант 1. $y = x^2 + 3x$.

Вариант 2. $y = - x^2 + 5x$.

Вариант 3. $y = 4x^2 + 8x$.

Вариант 4. $y = - x^2 + 3x$.

Вариант 5. $y = 5x^2 + 10x$.

Вариант 6. $y = - x^2 +4x$.

Вариант 7. $y = 2x^2 + 6x$.

Вариант 8. $y =- x^2 - 5x$.

Вариант 9. $y = x^2 + 7x$.

Вариант 10. $y = - x^2 + 4x$.

6 Следствия из теорем сложения и умножения

Прочитать и решить задачи.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Аналогичный факт справедлив и для большего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий A, B и C:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

Задача 1

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

По классическому определению:

$p_1=\frac{4}{20}=0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3=\frac{7}{20}=0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий: $p=p_1+p_3=0{,}2+0{,}35=0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: 0,55

Задача 2

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

Решение: всего: 10 + 6 = 16 пуговиц в коробке. $C_{16}^2=\frac{16!}{14!\cdot 2!}=\frac{15\cdot 16}{2}=120$ способами можно извлечь 2 пуговицы из коробки; $C_{10}^2=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45$ способами можно извлечь 2 красные пуговицы; $C_6^2=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15$ способами можно извлечь 2 синие пуговицы. По классическому определению:

$$p_K = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$$ – вероятность того, что из коробки будут извлечены две красные пуговицы;

$$p_C = \frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$ – вероятность того, что из коробки будут извлечены две синие пуговицы.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$p = p_K + p_C = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$ – вероятность того, что из коробки будут извлечены две одноцветные пуговицы.

Ответ: 0,5

Зависимые и независимые события.

Начнём с независимых событий. События являются независимыми, если вероятность наступления любого из них не зависит от появления/не появления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).

Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на большее количество независимых событий, так, например, если события A, B, C независимы, то вероятность их совместного наступления равна: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Задача 3

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;
S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;
S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

$$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8; \quad P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9$$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие (из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь и из 2-го стандартная и из 3-го стандартная) выражается произведением $S_1S_2S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504

Задача 4

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

Решение: рассмотрим события: A_1, A_2, A_3 – из 1-й, 2-й и 3-й урны соответственно будет извлечён белый шар. По классическому определению вероятности:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Тогда вероятности извлечения чёрного шара из соответствующих урн равны:

$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Рассмотрим событие: B – из каждой урны будет извлечено по 1 белому шару.

Данное событие выражается в виде произведения $B = A_1A_2A_3$ (из 1-й урны будет извлечён БШ и из 2-й урны будет извлечён БШ и из 3-й урны будет извлечён БШ).

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(B) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$

Рассмотрим событие C – из каждой урны будет извлечено по 1 чёрному шару.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(C) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

Рассмотрим событие D – все три шара будут одного цвета. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $D = B + C$ (будут извлечены 3 белых или 3 чёрных шара)

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(D) = P(B + C) = P(B) + P(C) = 0{,}216 + 0{,}064 = 0{,}28$

Ответ: а) 0,216; б) 0,28

Зависимые события. Событие X называют зависимым, если его вероятность $P(X)$ зависит от одного или большего количества событий, которые уже произошли.

В зависимости от различных обстоятельств данное событие может быть как достоверным $P(X)=1$, так и невозможным $P(X)=0$. Таким образом, событие X является зависимым.

Событие B является зависимым, если помимо случайных факторов его вероятность зависит от появления либо не появления события A. Вероятность события B, вычисленная в предположении того, что событие A уже произошло, называется условной вероятностью наступления события B и обозначается через $P_A(B)$. При этом события A и B называют зависимыми событиями (хотя, строго говоря, зависимо только одно из них).

Задача 5

Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется червой, если до этого:

а) была извлечена черва;

б) была извлечена карта другой масти.

Решение: рассмотрим событие: B – вторая карта будет червой. Совершенно понятно, что вероятность этого события зависит от того, черву или не черву вытянули ранее.

Если сначала была извлечена черва (событие A), то в колоде осталось 35 карт, среди которых теперь находится 8 карт червовой масти. $P_A(B)=\frac{8}{35}$ – вероятность того, что вторая карта окажется червой при условии, что до этого тоже была извлечена черва.

Если же сначала была извлечена карта другой масти (событие $\overline{A}$), то все 9 черв остались в колоде. $P_{\overline{A}}(B)=\frac{9}{35}$ – вероятность того, что вторая карта окажется червой при условии, что до этого была извлечена карта другой масти.

Всё логично – если вероятность извлечения червы из полной колоды составляет $P(A)=\frac{9}{36}=0{,}25$, то при извлечении следующей карты аналогичная вероятность изменится: в первом случае – уменьшится $P_A(B)=\frac{8}{35}\approx 0{,}23$ (т.к. черв стало меньше), а во втором – возрастёт: $P_{\overline{A}}(B)=\frac{9}{35}\approx 0{,}26$ (т.к. все червы остались в колоде).

Ответ: а) $\frac{8}{35}$, б) $\frac{9}{35}$

Зависимых событий, разумеется, может быть и больше. Добавим ещё одно: C – третьей картой будет извлечена черва. Предположим, что произошло событие A, а затем событие B; тогда в колоде осталось 34 карты, среди которых 7 черв.

$P_{AB}(C)=\frac{7}{34}$ – вероятность наступления события C при условии, что до этого были извлечены две червы.

Для самостоятельной тренировки:

Задача 6

В конверте находится 10 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных. Из конверта последовательно извлекаются билеты. Найти вероятности того, что:

а) 2-й извлечённый билет будет выигрышным, если 1-й был выигрышным;

б) 3-й будет выигрышным, если предыдущие два билета были выигрышными;

в) 4-й будет выигрышным, если предыдущие билеты были выигрышными.

Решение*:* рассмотрим события: A_1, A_2, A_3, A_4 – при 1-й, 2-й, 3-й и 4-й попытках соответственно будет извлечён выигрышный билет.

Пусть событие A_1 состоялось. Тогда в конверте осталось 9 билетов, среди которых 2 выигрышных. По классическому определению: $P_{A_1}(A_2)=\frac{2}{9}$ – вероятность того, что 2-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого извлечён выигрышный билет.

Если произошли события A_1, A_2, то в конверте осталось 8 билетов, среди которых 1 выигрышный. По классическому определению: $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{1}{8}$ – вероятность того, что 3-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого было извлечено два выигрышных билета.

Если произошли события A_1, A_2, A_3, то в конверте не осталось выигрышных билетов. По классическому определению: $P_{A_1A_2A_3}(A_4)=\frac{0}{7}=0$ – вероятность того, что 4-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого были извлечены три выигрышных билета.

Ответ*:* а) $\frac{2}{9}$, б) $\frac{1}{8}$, в) 0

Теорема умножения вероятностей зависимых событий: вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$

Задача 7

В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут белыми;

б) оба шара будут чёрными;

в) сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

Обратите внимание на уточнение «не возвращая их обратно». Этот комментарий дополнительно подчёркивает тот факт, что события зависимы.

Решение: всего в урне: 4 + 7 = 11 шаров.

Рассмотрим события A – первый шар будет белым, B – второй шар будет белым и найдём вероятность события AB, состоящего в том, что 1-й шар будет белым **и** 2-й белым.

По классическому определению вероятности: $P(A)=\frac{4}{11}$. Предположим, что белый шар извлечён, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых, поэтому: $P_A(B)=\frac{3}{10}$ – вероятность извлечения белого шара во 2-м испытании при условии, что до этого был извлечён белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{55}$ – вероятность того, что оба шара будут белыми.

Найдём вероятность события $\overline{A}\overline{B}$, состоящего в том, что 1-й шар будет чёрным и 2-й чёрным

По классическому определению: $P(\overline{A})=\frac{7}{11}$ – вероятность того, что в 1-м испытании будет извлечён чёрный шар. Пусть извлечён чёрный шар, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 6 чёрных, следовательно: $P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ – вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен чёрный шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий: $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{7}{11}\cdot\frac{3}{5}=\frac{21}{55}$ – вероятность того, что оба шара будут чёрными.

Найдём вероятность события $A\overline{B}$ (сначала будет извлечён белый шар и затем чёрный)

После извлечения белого шара (с вероятностью $P(A)=\frac{4}{11}$) в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых и 7 чёрных, таким образом: $P_A(\overline{B})=\frac{7}{10}$ – вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий: $P(A\overline{B})=P(A)\cdot P_A(\overline{B})=\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}=\frac{14}{55}$ – искомая вероятность.

а) $\frac{6}{55}$, б) $\frac{21}{55}$, в) $\frac{14}{55}$

Задачи на теоремы сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий.

Задача 8

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;

б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Решение: вероятность попадания/промаха одного стрелка, очевидно, не зависит от результативности другого стрелка.

Рассмотрим события: A_1 – 1-й стрелок попадёт в мишень; A_2 – 2-й стрелок попадёт в мишень.

По условию: $P(A_1)=0{,}8;\quad P(A_2)=0{,}6$.

Найдём вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ – того, что соответствующие стрелки промахнутся:

$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}8=0{,}2;$

$P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}6=0{,}4.$

а) Рассмотрим событие: B – только один стрелок попадёт в мишень. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:

1-й стрелок попадёт и 2-й промахнётся

или

1-й промахнётся и 2-й попадёт.

На языке алгебры событий этот факт запишется следующей формулой: $B=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:

$P(B)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)=$

$=0{,}8\cdot0{,}4+0{,}2\cdot0{,}6=0{,}32+0{,}12=0{,}44$ – вероятность того, что будет только одно попадание.

б) Рассмотрим событие: C – хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

В данном случае это означает, что попадёт или 1-й стрелок (2-й промахнётся) или 2-й (1-й промахнётся) или оба стрелка сразу – итого 3 несовместных исхода.

События A_1, A_2 совместны, а значит, их сумма $A_1 + A_2$ выражает событие «хотя бы один стрелок попадёт в мишень» По теореме сложения вероятностей совместных событий и теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 1{,}4 - 0{,}48 = 0{,}92$$

Ответ: а) 0,44, б) 0,92

Решить задачи.

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым—0,5. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал и мишень.

2.У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

3.В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника—0,9, для велосипедиста—0,8. и для бегуна—0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

4.Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 — 0,9, Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

5. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором—30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика—стандартная.

6. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

7.В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

8.Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

9. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берет билет первым или последним?

10. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

11. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11?

7 Виды распределений ДСВ

Написать конспект.

Случайной величиной называют такую переменную величину, которая под воздействием случайных факторов может с определенными вероятностями принимать те или иные значения из некоторого множества чисел. Случайная величина X называется дискретной, если результаты наблюдений представляют собой конечный или счетный набор возможных чисел.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соотношение, устанавливающее связь между отдельными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Соответствие между возможными значениями x_1, $x_2,\ldots,x_n$ случайной величины X и их вероятностями p_1, $p_2,\ldots,p_n$ называется законом распределения случайной величины X.

Закон распределения случайной величины может быть представлен в виде таблицы 7.1.

Таблица 7.1 - Закон распределения случайной величины

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Биномиальное распределение. Пусть случайная величина X- число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а не появления – q=1-p. Очевидно, что X может принимать значения 0,1,2,…,n, вероятности которых определяются по формуле Бернулли.

Закон распределения случайной величины X, имеющий вид (таблица 7.2) называется биномиальным распределением.

Таблица 7.2 - Биномиальное распределение случайной величины X

x	0	1	2	…	m	…	n
p	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$		$C_n^mp^mq^{n-m}$		$C_n^np^nq^0$

Пример 1. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9.

Решение. Случайная величина X – число попаданий в цель при четырех выстрелах – может принимать значения 0,1,2,3,4, а соответствующие им вероятности находим по формуле Бернулли:

$$P(X=0)=C_4^0 0{,}9^0 0{,}1^4=0{,}0001;$$

$$P(X = 1) = C_4^1 0{,}9^1 0{,}1^3 = 0{,}0036;$$
$$P(X = 2) = C_4^2 0{,}9^2 0{,}1^2 = 0{,}0484;$$
$$P(X = 3) = C_4^3 0{,}9^3 0{,}1^1 = 0{,}2916;$$
$$P(X = 4) = C_4^4 0{,}9^4 0{,}1^0 = 0{,}6561$$

Итак, искомый закон распределения имеет вид (таблица 7.3):

Таблица 7.3 - Закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
p	*0,0001*	*0,0036*	*0,0486*	*0,2916*	*0,6561*

Математическое ожидание. Среди числовых характеристик ДСВ весьма важной является математическое ожидание, которое указывает, какое среднее значение случайной величины следует ожидать в результате испытаний или наблюдений.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пример2. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон распределения (таблица 7.4).

Таблица 7.4 - Закон распределения ДСВ

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
p	*0,2*	*0,1*	*0,25*	*0,15*	*0,3*

Находим $M(X)=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}15+3\cdot 0{,}3=1{,}25$

Дисперсией ДСВ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения: $D(X)=M(X-M(X))^2$.

Пример3. Дискретная случайная величина распределена по закону (таблица 5), найти D(X).

Таблица 7.5- Закон распределения ДСВ

x	*-1*	*0*		*1*	*2*
p	*0,2*	*0,1*		*0,3*	*0,4*

Находим сначала $M(X)=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4=0{,}9$, а затем $M(X^2)=1\cdot 0{,}2=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}4=2{,}1$, $D(X)=2{,}1-0{,}9^2=2{,}1-0{,}81=1{,}29$

Заключение

В данном пособии наглядно изложен материал, благодаря подробному рассмотрению примеров и использованию рисунков. Студенты смогут освоить данный материал и при необходимости решить задачи. Данные теоретические сведения позволяют дополнить знания, полученные на уроках с преподавателем.

Список использованных источников

1 Валуцэ И. И., Дилигул Г. Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука., 1990 – 576 с.

2 Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб.пособие для техникумов. – 3-еизд.,перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 495 с.: ил.

3http:// www.matica.org.ua

4 http:// www.урок.рф

5 http:// www.mathprofi.ru